Beispiele zur schriftlichen Klausur in Mathematik

Zum Aufwärmen

Verschiedene Darstellungen rationaler Zahlen

Die folgende Tabelle enthält in jeder Zeile jeweils dieselbe Zahl in drei verschiedenen Darstellungen:

Darstellung in Potenzschreibweise	Darstellung in Bruchschreibweise	Darstellung in Dezimalschreibweise
2^{-3}	$\frac{1}{8}$	0,125
		0,001
5^{-2}		

Die Tabelle ist zu ergänzen.

Zahlbereiche

In der folgenden Tabelle ist durch Ankreuzen einzutragen, zu welchen der oben genannten Zahlenmengen die links aufgelisteten Zahlen gehören:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\frac{6}{3}$	○	○	○	○
$\frac{6}{\pi}$	○	○	○	○
6,06	○	○	○	○
$0,\dot{6}$	○	○	○	○
-6	○	○	○	○
6	○	○	○	○
$\sqrt{6}$	○	○	○	○
606	○	○	○	○

Exponenten und Logarithmen

Es sind die folgenden drei Gleichungen zu lösen:

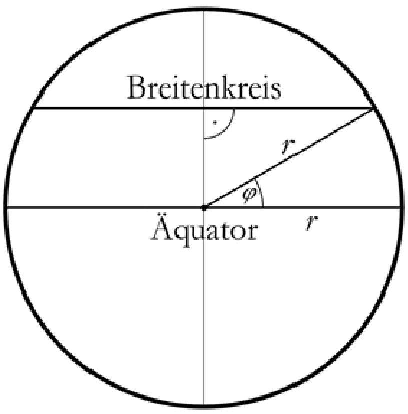
a) $2^x = 8$

b) $2^y = \frac{1}{32}$

c) $2^z = \sqrt[3]{4}$

Breitenkreise der Erde

Wie lautet – wenn man davon ausgeht, dass die Erde eine Kugel mit dem Radius *r* ist – die Formel für den Umfang eines Breitenkreises mit der geographischen Breite φ?



Beispiele für geeignete Winkel

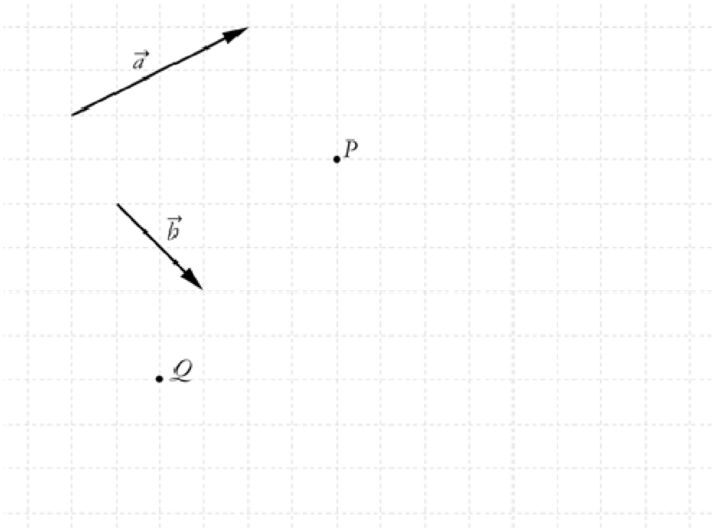
In der folgenden Tabelle sind in jeder Zeile zwei Bedingungen für einen Winkel angegeben. Es ist in jeder Zeile ein konkreter Wert für einen Winkel so anzugeben, dass beide in der Zeile genannten Bedingungen erfüllt sind:

Bedingungen		Winkelbeispiel
$\sin a > 0$	$\cos a > 0$	$a =$
$\sin \beta = 0$	$\cos \beta < 0$	$\beta =$
$\sin \gamma = 0{,}5$	$\cos \gamma > 0$	$\gamma =$
$\sin \delta > 0{,}5$	$\cos \delta < 0$	$\delta =$

Geometrie

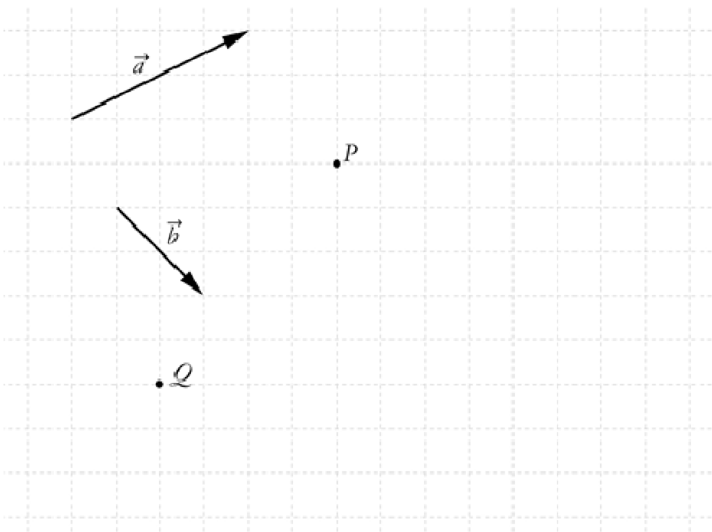
Zeichnen von Vektoren

In der Skizze sind zwei Pfeile eingezeichnet, welche die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen. Außerdem finden sich in der Skizze die Bilder von zwei Punkten P und Q.



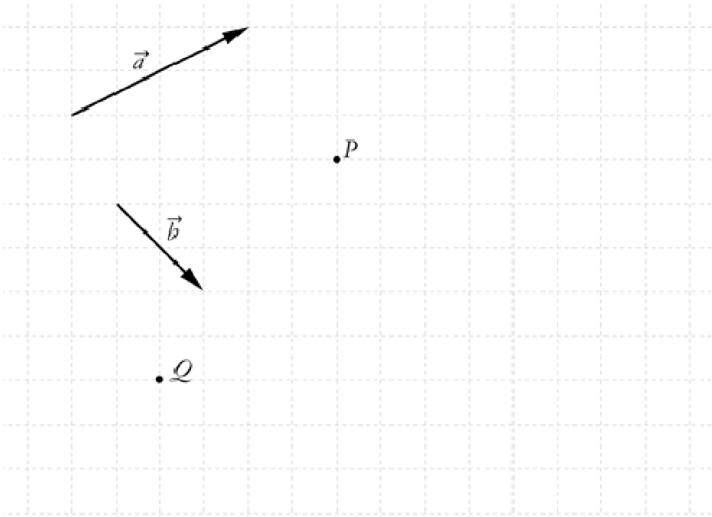
Zeichnen von Vektoren

a) Der Vektor $\vec{c}$ ist durch die Gleichung $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ festgelegt. Dieser Vektor $\vec{c}$ ist als ein vom Punkt P ausgehender Pfeil zu zeichnen.



Zeichnen von Vektoren

b) Der Vektor $-\frac{1}{2}\vec{a}$ ist als ein vom Punkt Q ausgehender Pfeil zu zeichnen.



Punkte und Geraden

In einem Koordinatensystem sind die drei Punkte A, B, C durch ihre Koordinaten gegeben: $A\,(3|2)$, $B\,(7|4)$ und $C\,(7|1)$. Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

Wie lautet die Gleichung der auf g normal stehenden Geraden h, welche durch den Punkt C verläuft?

Parallele Geraden

Zwei Geraden *g* und *h* seien durch die folgenden Gleichungen gegeben:

g: $4x + 12y = 7$
h: $x + by = c$,

wobei *b* und *c* zwei Konstanten bezeichnen. Für welche Werte von *b* und *c* haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam? Es sind dabei alle möglichen Lösungen zu nennen.

Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum

a) Was versteht man unter dem Abstand eines Punktes von einer Geraden, wenn sich der Punkt und die Gerade im dreidimensionalen Raum befinden?

b) Wie lautet der Abstand des Punktes $P\,(4\,|\,2\,|\,-3)$ von der *y*-Achse, also von der zweiten Achse des dreidimensionalen Koordinatensystems?

Produkt von Vektoren

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Wie lautet das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

b) Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

Radsportler

Aus einem Trainingsprotokoll geht hervor, dass ein Radsportler am ersten Tag a_1 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_1 Kilometer pro Stunde gefahren ist. Am zweiten Tag fuhr er a_2 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_2 Kilometer pro Stunde. Und am dritten Tag fuhr er a_3 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_3 Kilometer pro Stunde. Die pro Tag gefahrenen Stunden werden als Vektor

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

zusammengefasst, die jeweiligen durchschnittlichen Geschwindigkeiten als Vektor

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

a) Was bedeutet $A \cdot B$ in diesem Zusammenhang?

b) Was bedeutet $1{,}15 \cdot B$ in diesem Zusammenhang?

Radsportler

Aus einem Trainingsprotokoll geht hervor, dass ein Radsportler am ersten Tag a_1 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_1 Kilometer pro Stunde gefahren ist. Am zweiten Tag fuhr er a_2 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_2 Kilometer pro Stunde. Und am dritten Tag fuhr er a_3 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_3 Kilometer pro Stunde. Die pro Tag gefahrenen Stunden werden als Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

zusammengefasst, die jeweiligen durchschnittlichen Geschwindigkeiten als Spalte

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

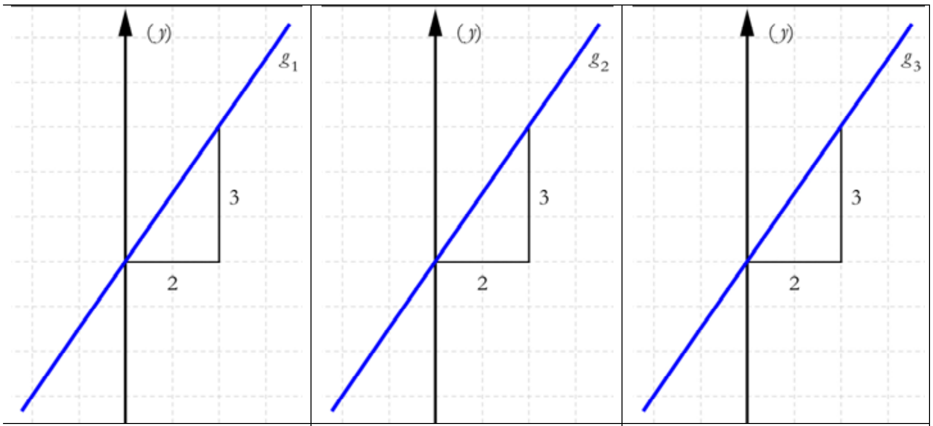
a) Was bedeutet AB in diesem Zusammenhang?

b) Was bedeutet $1{,}15 \cdot B$ in diesem Zusammenhang?

Lineare Funktionen

Zeichnen von linearen Funktionen

Drei Geraden g_1, g_2 und g_3 sind sowohl graphisch als auch durch ihre Gleichungen gegeben. Zusätzlich ist bei jeder der drei Geraden – sie besitzen alle den gleichen Anstieg – das Steigungs-Dreieck eingetragen. Hingegen fehlen in den graphischen Darstellungen die x-Achsen.



$g_1 : y = \frac{3}{2}x$	$g_2 : y = \frac{3}{2}x - 3$	$g_3 : y = \frac{3}{2}x + 2$

In allen drei Skizzen sind die fehlenden x-Achsen an der richtigen Stelle einzuzeichnen.

Lineare Funktionen

Von fünf über $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 kennt man einige Wertepaare:

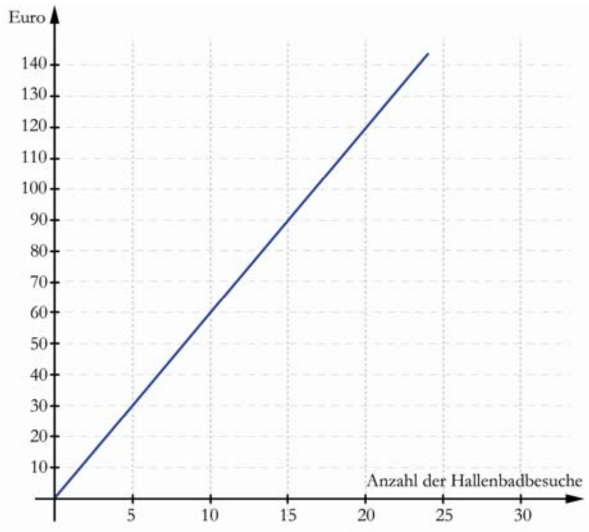
x	$f_1(x)$	x	$f_2(x)$	x	$f_3(x)$	x	$f_4(x)$	x	$f_5(x)$
–2	1	–2	2	–2	5	–2	5	–2	3
–1	1	–1	2	–1	2	–1	3	–1	3
0	3	0	2	0	1	0	1	0	–3
1	5	1	2	1	2	1	–1	1	3
2	7	2	2	2	5	2	–3	2	3

Es ist anzukreuzen, welche dieser Funktionen *keine* lineare Funktion sein kann:

f_1 ○ f_2 ○ f_3 ○ f_4 ○ f_5 ○

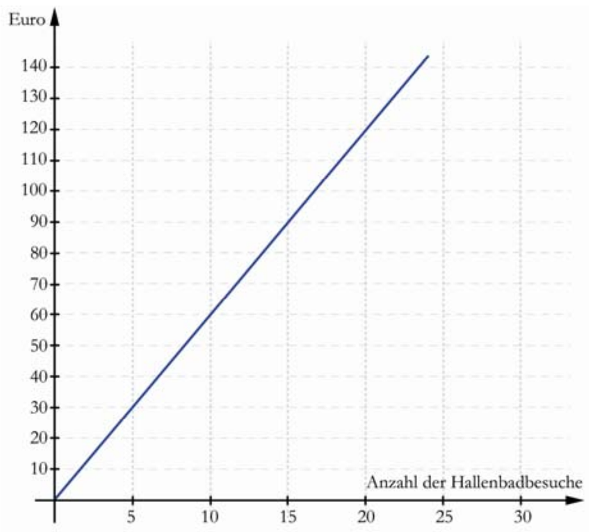
Im Hallenbad

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Besuche im Hallenbad und der sich daraus ergebenden Zahlungen für den Eintritt wird in der folgenden Graphik verdeutlicht:



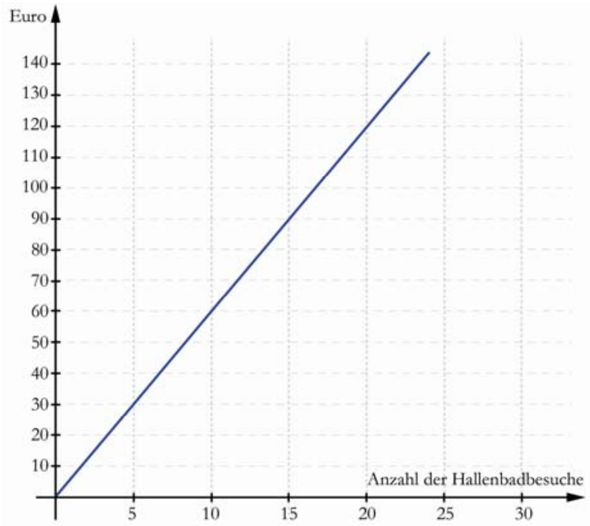
Im Hallenbad

a) Wie kann man den in der Skizze graphisch dargestellten Zusammenhang mit Hilfe einer linearen Funktion als Formel beschreiben?



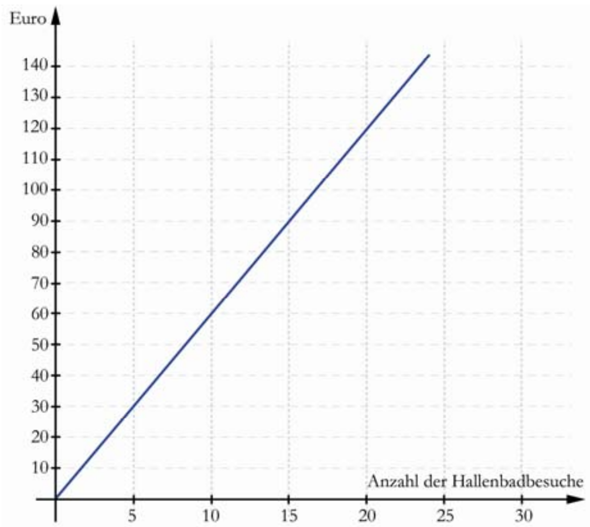
Im Hallenbad

b) Wenn man Mitglied im Schwimmklub ist, zahlt man zwar eine einmalige Klubgebühr von 45 Euro, dafür kostet jeder Besuch des Hallenbades nur mehr die Hälfte. Wie kann man die Zahlungen eines Klubmitgliedes in die vorgelegte Skizze einzeichnen?



Im Hallenbad

c) Aus der Skizze kann man bereits entnehmen, ab wie vielen Hallenbadbesuchen es sich rechnet, Mitglied im Schwimmklub zu sein. Ab wie vielen Hallenbadbesuchen ist dies der Fall?



Einkauf beim Bauern

Beim Bauern kostet bei Abholung der Ware vom Hof ein Kilogramm Erdäpfel 40 Cent. Für die Fahrt hin und zurück müssen allerdings Kosten von sieben Euro veranschlagt werden.

a) Wie lautet eine Formel für die Kosten $K = K(x)$, die sich aus den Fahrtkosten und dem Preis beim Kauf von x kg Erdäpfel ergeben?

b) Kauft man Erdäpfel der gleichen Kartoffelsorte im Geschäft, bezahlt man pro Kilogramm 50 Cent. Wie viele Kilogramm Erdäpfel muss man mindestens kaufen, damit sich die Fahrt zum Bauern lohnt?

c) Ab welcher Menge Erdäpfel ist der Preisunterschied zwischen dem Kauf im Geschäft und dem Direktkauf beim Bauern, die Kosten für eine Fahrt miteingerechnet, größer als 25 Euro?

Kurvendiskussionen

Volumen einer Schachtel

Aus einem quadratischen Stück Blech mit Seitenlänge sechs Dezimeter wird eine (oben offene) Schachtel hergestellt. Dazu werden in den vier Ecken jeweils gleich große Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Die am Rand entstandenen Rechteckstreifen werden dann aufgebogen und verlötet – die Schachtel ist fertig.

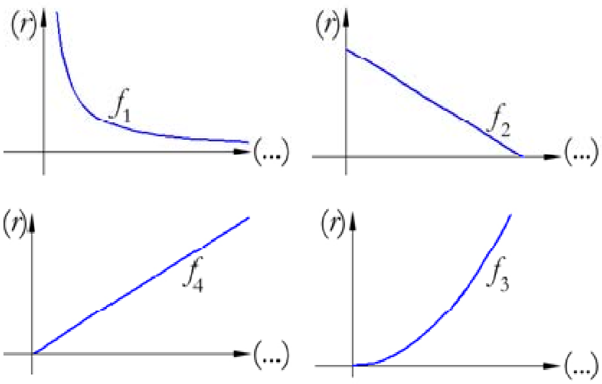
a) Wie lautet die Funktionsgleichung für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von x? Zwischen welchen Werten wird dabei x variieren?

b) Es ist eine Wertetabelle für diese Funktion aufzustellen und die Funktion graphisch darzustellen.

c) Für welchen Wert von x besitzt die Schachtel das größte Volumen?

Zuordnung von Funktionen zu ihren Schaubildern

In der folgenden Skizze sind vier Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 durch ihre Schaubilder graphisch dargestellt:

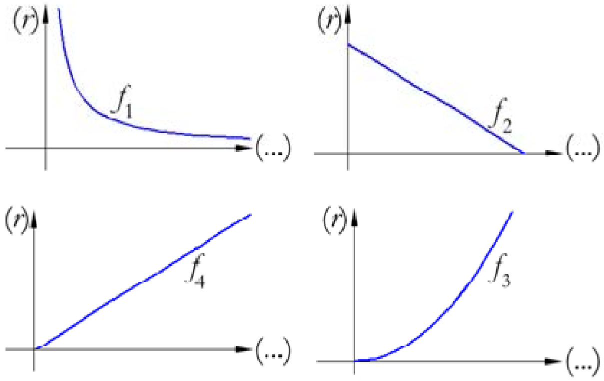


Zuordnung von Funktionen zu ihren Schaubildern

Drei dieser vier Funktionen stellen den Zusammenhang zwischen der Variablen r und jeweils einer der drei positiven Variablen s, t, u dar, der durch die Formel

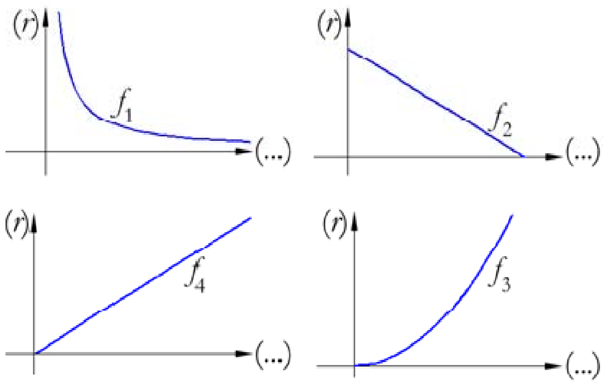
$$r = \frac{2 \cdot s^2 \cdot t}{u}$$

gegeben ist. Genauer lauten die drei Fragen so:



Zuordnung von Funktionen zu ihren Schaubildern

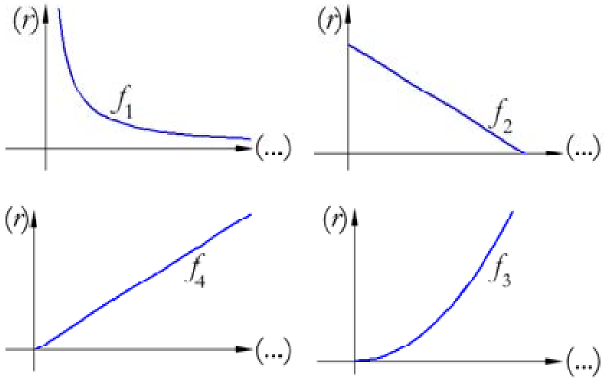
a) In der Formel seien t und u konstant. Welche der vier in den Skizzen dargestellten Funktionen f_i beschreibt den Zusammenhang $r = f_i(s)$? In der entsprechenden Skizze ist die waagrechte Achse als s-Achse zu bezeichnen.



$$r = \frac{2 \cdot s^2 \cdot t}{u}$$

Zuordnung von Funktionen zu ihren Schaubildern

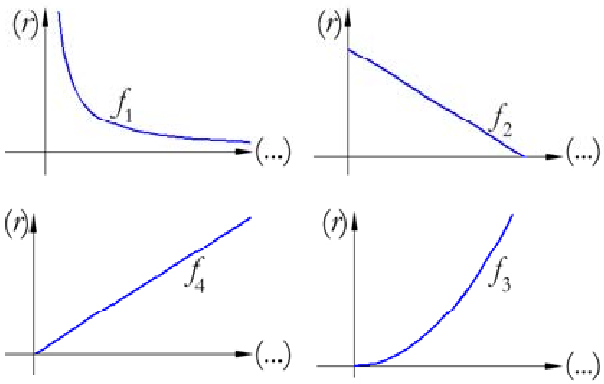
b) In der Formel seien *s* und *u* konstant. Welche der vier in den Skizzen dargestellten Funktionen f_j beschreibt den Zusammenhang $r = f_j(t)$? In der entsprechenden Skizze ist die waagrechte Achse als *t*-Achse zu bezeichnen.



$$r = \frac{2 \cdot s^2 \cdot t}{u}$$

Zuordnung von Funktionen zu ihren Schaubildern

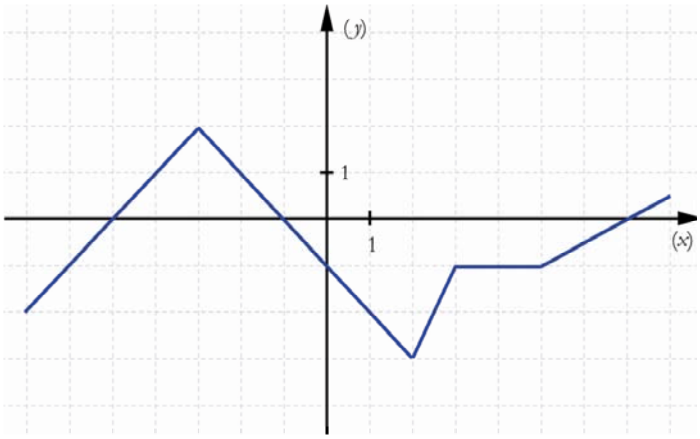
c) In der Formel seien *s* und *t* konstant. Welche der vier in den Skizzen dargestellten Funktionen f_k beschreibt den Zusammenhang $r = f_k(u)$? In der entsprechenden Skizze ist die waagrechte Achse als *u*-Achse zu bezeichnen.



$$r = \frac{2 \cdot s^2 \cdot t}{u}$$

Eigenschaften einer Funktion

Eine Funktion sei graphisch wie folgt gegeben:

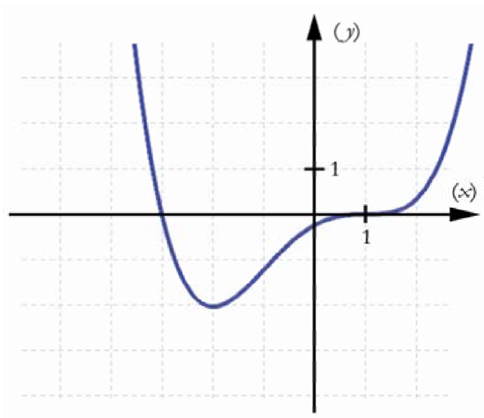


In der Tabelle ist anzukreuzen, in welchen Intervallen diese Funktion

	[–5 ; –3[	[–2 ; 0]	[4 ; 5]
monoton fällt	○	○	○
konstant ist	○	○	○
monoton wächst	○	○	○

Kurvendiskussion

Bei einer durch das folgende Schaubild gegebenen Funktion sind aus der Skizze abzulesen:



a) die Nullstellen

b) die Stellen der lokalen Extrema – um welche lokalen Extrema handelt es sich?

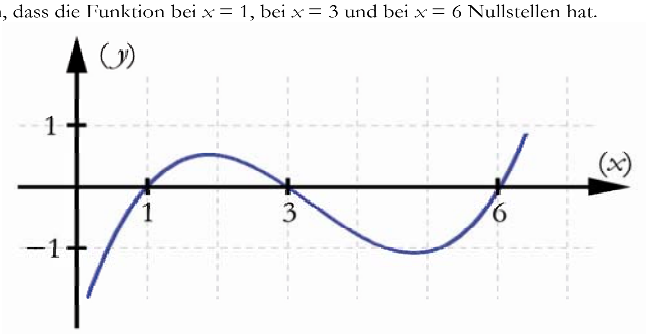
c) die Wendepunkte.

d) Es ist zu beschreiben, über welchen Intervallen die Funktion monoton wächst und über welchen Intervallen sie monoton fällt.

Das Integral

Bestimmtes Integral

Das Schaubild einer Funktion f ist im Folgenden skizziert, Man kann ihm insbesondere entnehmen, dass die Funktion bei $x = 1$, bei $x = 3$ und bei $x = 6$ Nullstellen hat.

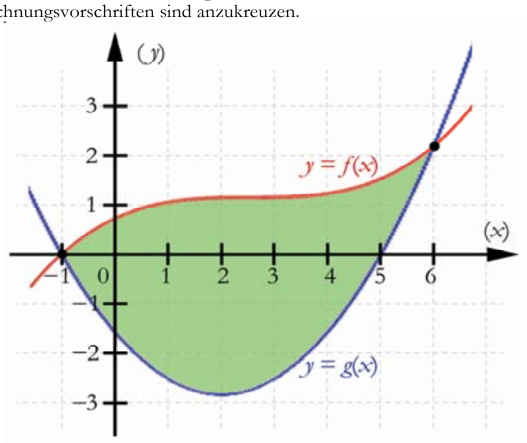


Die richtigen unter den folgenden Aussagen sind anzukreuzen:

a)	$\int_1^6 f(x)dx < 0$	○
b)	$\int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx > 0$	○
c)	$\left\|\int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx\right\| > 0$	○
d)	$\int_1^3 f(x)dx > 0$ und $\int_3^6 f(x)dx < 0$	○

Fläche zwischen zwei Kurven

Die Funktionskurven zweier Funktionen f und g schließen zwischen $x = -1$ und $x = 6$ ein Flächenstück so ein, wie es im nachfolgenden Diagramm dargestellt ist. Welche der folgenden Berechnungsvorschriften zur Ermittlung des Inhalts dieses Flächenstücks sind korrekt? Die richtigen Berechnungsvorschriften sind anzukreuzen.

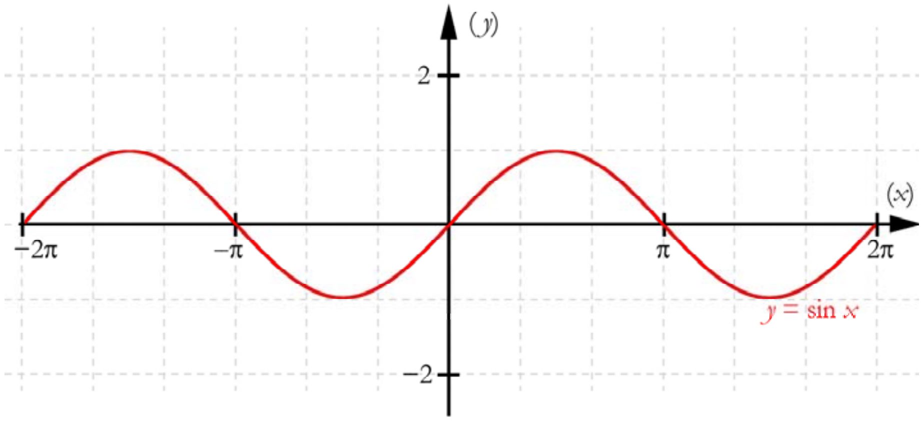


a)	$\int_{-1}^{6} (g(x) - f(x))dx$	○
b)	$\int_{-1}^{6} f(x)dx - \int_{-1}^{6} g(x)dx$	○

Trigonometrische Funktionen

Schaubild einer trigonometrischen Funktion

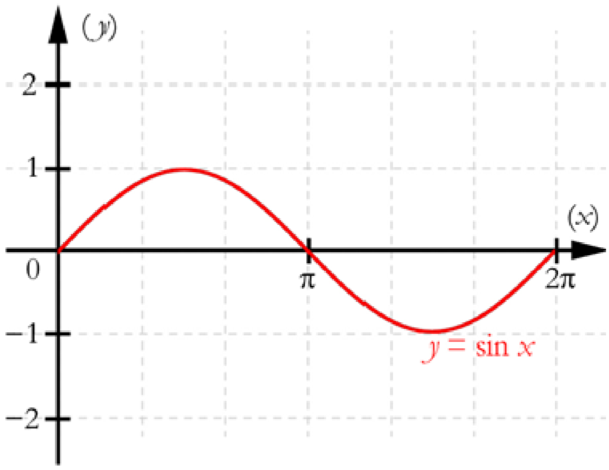
Zum vorgegebenen Schaubild der durch $y = \sin x$ gegebenen Sinusfunktion ist das Bild der folgendermaßen gegebenen Funktion f zu skizzieren:



$$y = f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

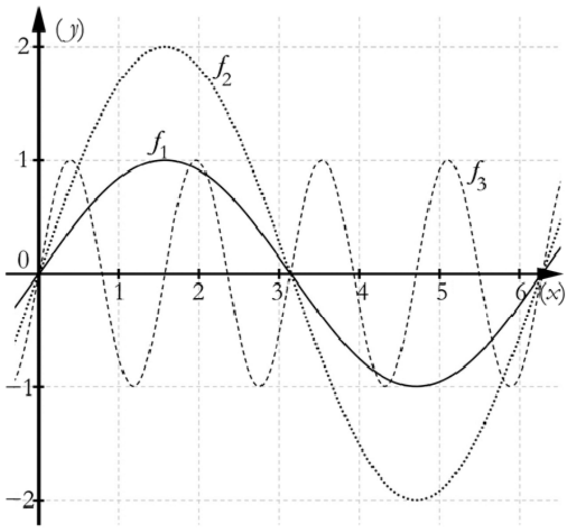
Zeichnen einer trigonometrischen Funktion

Zum vorgegebenen Schaubild der durch $y = \sin x$ gegebenen Sinusfunktion ist das Bild der folgendermaßen gegebenen Funktion f zu skizzieren: $y = f(x) = \sin(2x)$.



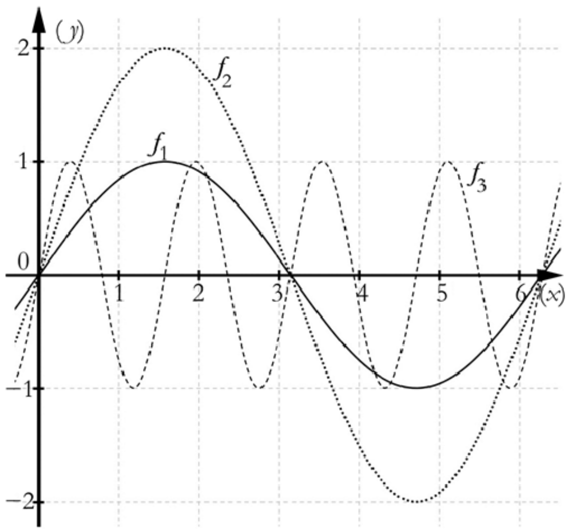
Ermittlung von Funktionsgleichungen

In der vorliegenden Graphik sieht man das Schaubild der Funktion f_1, die durch $y = f_1(x) = \sin x$ gegeben ist. Ferner sind die Schaubilder von zwei weiteren Funktionen f_2 und f_3 eingetragen.



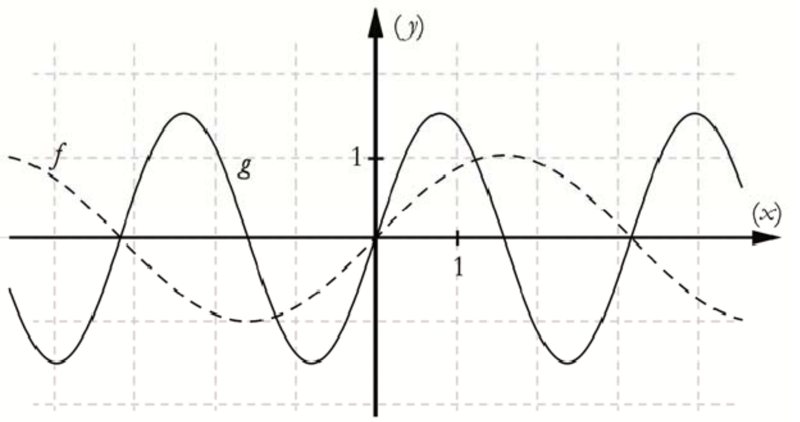
Ermittlung von Funktionsgleichungen

a) Wie lautet die Funktionsgleichung der Funktion f_2?
b) Wie lautet die Funktionsgleichung der Funktion f_3?



Sinusfunktion mit Parametern

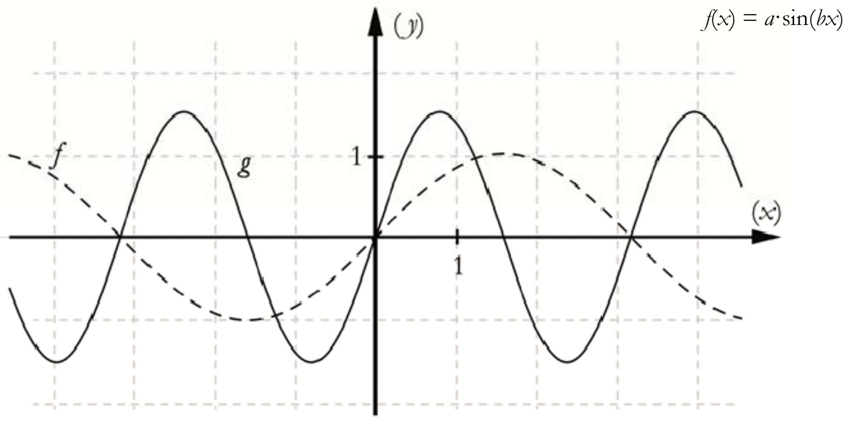
Es liegt eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = a \cdot \sin(bx)$ vor, in der a und b zwei positive Parameter bezeichnen. In der Skizze ist das Schaubild von f strichliert gezeichnet. Zusätzlich scheint in der Skizze das Schaubild einer Funktion g von derselben Bauart auf:



Sinusfunktion mit Parametern

Welche Änderungen muss man an den Parametern a und b vornehmen, damit man aus der Funktion f die Funktion g erhält? Es ist anzukreuzen:

	vergrößern	verkleinern	beibehalten
Man muss den Wert von a …	○	○	○
Man muss den Wert von b …	○	○	○



Wachstum und Zerfall

Halbwertszeit

Die Stoffmenge N eines radioaktiven Elements nimmt mit der Zeit t ab. Das Element zerfällt dabei nach dem Gesetz $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. In ihr bezeichnen die Variable N die Stoffmenge des Elements, die noch zur Zeit t vorhanden ist, und die Konstante N_0 jene Stoffmenge des Elements, die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhanden war. Die Konstante λ ist eine für das Element typische Größe.

a) Unter der Halbwertszeit τ des Elements versteht man jene Zeitspanne, in der die Hälfte des Elements zerfallen ist. Wie kann man τ aus der Konstanten λ ermitteln?

b) Welche Folgerung kann man aus der Tatsache ziehen, dass die Halbwertszeit τ nicht von der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge N_0 abhängt?

Luftdruck

Die Größe des Luftdrucks p der Erdatmosphäre hängt von der Meereshöhe h jener Stelle ab, an der man den Luftdruck misst: $p = p(h)$. Es gilt das Gesetz der sogenannten *barometrischen Formel*

$$p = p_0 \cdot e^{-kh} .$$

In ihr sind p_0 und k zwei Konstanten.

a) Man kann die beiden Konstanten p_0 und k berechnen, wenn man weiß, dass der Luftdruck auf Meereshöhe, also bei $h = 0$, den Wert 1013 mbar besitzt und dass der Luftdruck 4000 m über dem Meeresspiegel nur mehr 600 mbar beträgt. Wie lauten die Werte von p_0 und h?

b) Wie groß ist der Luftdruck auf dem Hochschwabgipfel, der sich 2277 m über dem Meeresspiegel erhebt?

c) Bei welcher Höhe h über dem Meeresspiegel beträgt der Luftdruck nur mehr die Hälfte jenes Luftdruckes auf Meereshöhe?

Wachstum

Eine Funktionskurve, die einen Wachstumsprozess beschreibt, verläuft durch die beiden Punkte $A = (2|4)$ und $B = (4|6)$.

a) Wie lautet die Gleichung $y = f(x)$ der Funktion f, wenn es sich bei diesem Wachstumsprozess um ein lineares Wachstum handelt?

b) Wie lautet die Gleichung $y = g(x)$ der Funktion g, wenn es sich bei diesem Wachstumsprozess um ein exponentielles Wachstum handelt?

c) Die Schaubilder der beiden Funktionen f und g sind über dem Intervall $[0 ; 6]$ zu entwerfen.

Wahrscheinlichkeit

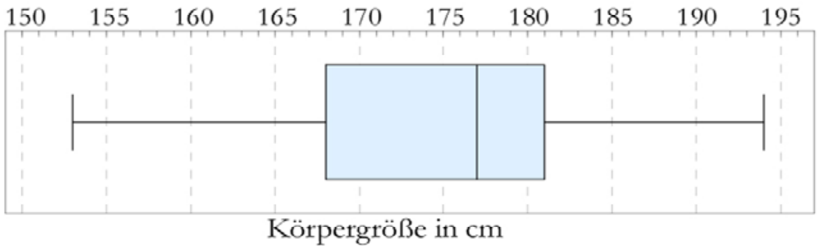
Die Blutgruppe A

Es ist bekannt, dass 40% aller in Österreich lebenden Personen die Blutgruppe A haben. Zwanzig zufällig ausgewählte in Österreich lebende Personen kommen in ein medizinisches Labor, um Blut zu spenden. Es ist zu entscheiden, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

	stimmt	stimmt nicht
Die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei ersten Personen beide die Blutgruppe A haben, beträgt 16%.	○	○
Wenn die ersten fünf Personen nicht die Blutgruppe A haben, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die sechste Person die Blutgruppe A hat, mehr als 40%	○	○
Es müssen genau acht der zwanzig Personen die Blutgruppe A haben.	○	○
Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Person nicht die Blutgruppe A hat, ist höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Blutgruppe A hat.	○	○

Grundwehrdienst

Bei einem Stellungstermin wurden unter anderem die Körpergrößen von 120 Rekruten gemessen. Das Ergebnis ist im folgenden „Box Plot“, also im folgenden Kastenschaubild veranschaulicht:



In den folgenden Aussagen, die aufgrund des Diagramms getroffen wurden, sind die richtigen Zahlen einzusetzen:

a) „Circa 50% der Rekruten sind kleiner als ……… cm.“

b) „Jeder Rekrut ist mindestens ……… cm groß.“

c) „Von den 120 Rekruten sind ca. ……… Rekruten mindestens 181 cm groß.“

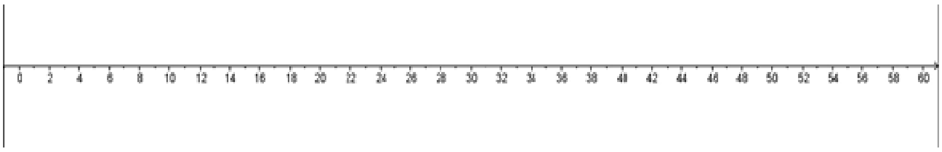
d) „Von den 120 Rekruten sind ca. ……… Rekruten größer als 168 cm.“

e) „Circa ……… Rekruten sind zwischen 168 cm und 181 cm groß.“

Mathematikhausübungen

In einer Klasse geben die 30 Schülerinnen und Schüler an, wie viele Minuten sie für ihre letzte Mathematikhausübung aufgewendet haben. In der folgenden Liste sind die angegebenen Zahlen bereits ihrer Größe nach geordnet:

0 , 0 , 10 , 10 , 10 , 10 , 12 , 13 , 15 , 20 , 20 , 20 , 20 , 20 , 20 , 20 , 30 , 30 , 30 , 30 , 30 , 35 , 35 , 35 , 40 , 40 , 45 , 45 , 45 , 60



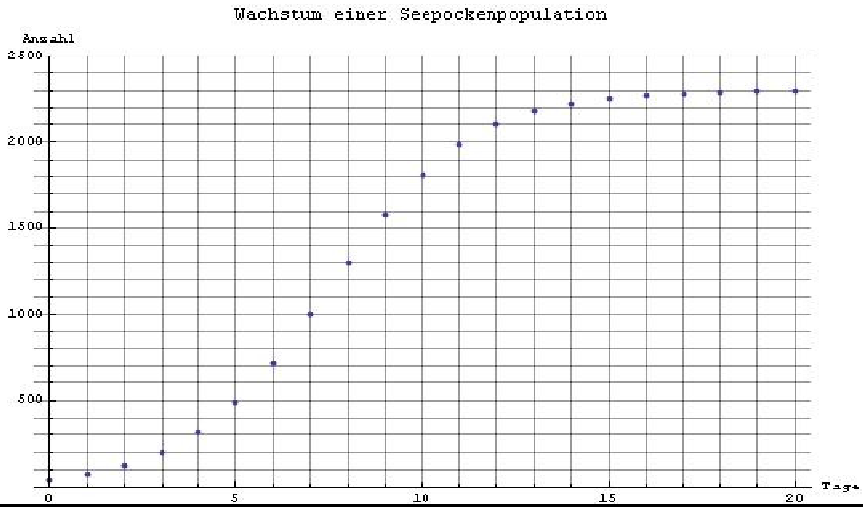
a) Es ist ein „Box Plot“, also ein Kastenschaubild für diese Daten zu zeichnen.

b) Welche Einsichten kann man aus diesem Kastenschaubild entnehmen?

Ein „Typ II“-Beispiel

Seepocken

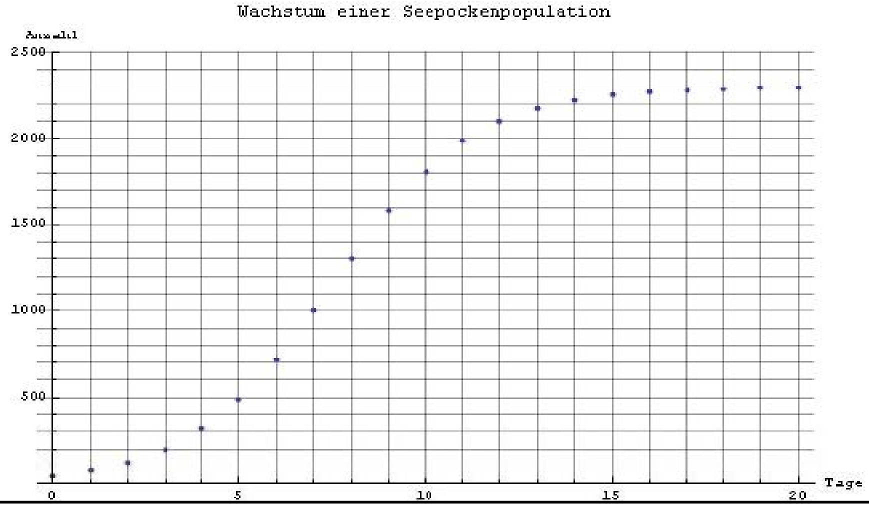
Seepocken sind kleine Krebse, die sich unter anderem auch an Schiffsrümpfen festsetzen. Die Graphik zeigt den Bestand an Seepocken jeweils am Ende eines Tages:



Seepocken

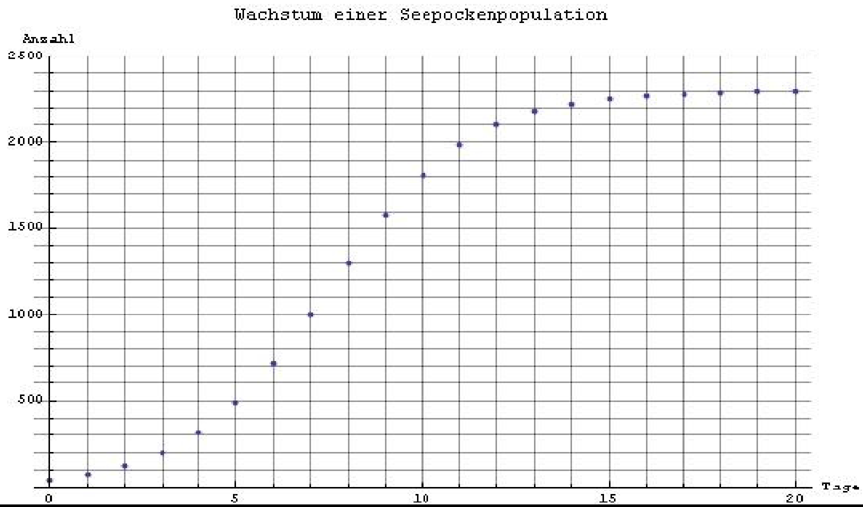
a) An welchen Tagen ist die absolute Zunahme der Seepockenzahl am größten? Schätzen Sie den Wert dieser Zunahme aus der Graphik ab!

[1 Punkt]



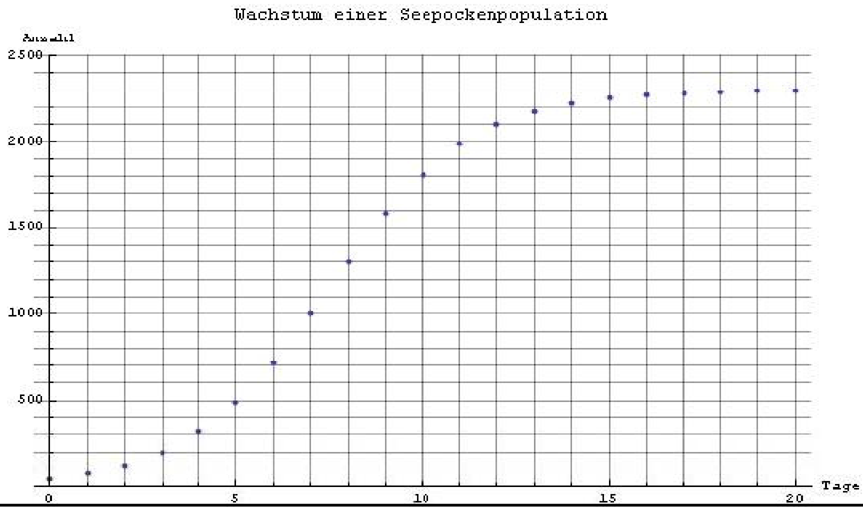
Seepocken

b) Ist an diesem Tag auch das prozentuelle Wachstum am größten? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine kurze Rechnung! (Entnehmen Sie die dazu erforderlichen Daten aus der Graphik!) [3 Punkte]



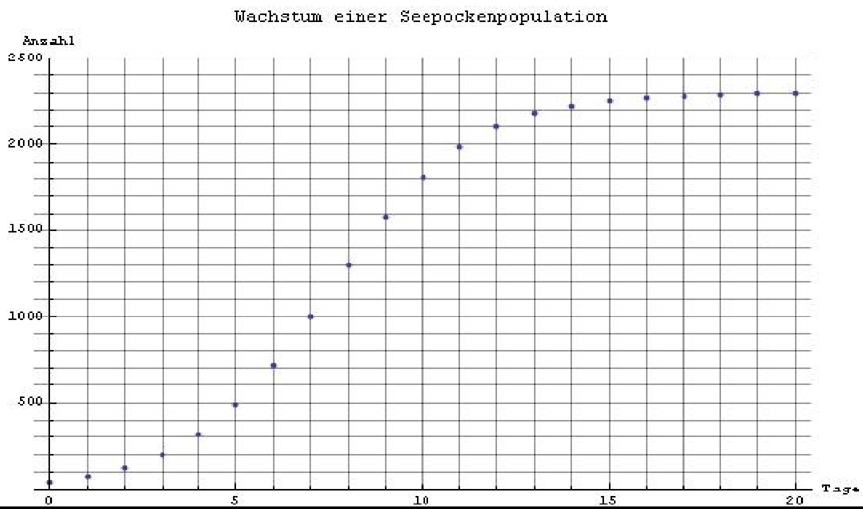
Seepocken

c) Für die Zahl der Seepocken gibt es offensichtlich einen „Sättigungswert“. Schätzen Sie diesen aus der Graphik ab! An welchem Tag ist die Zahl der Seepocken erstmals größer als 90% dieses Sättigungswertes? [2 Punkte]



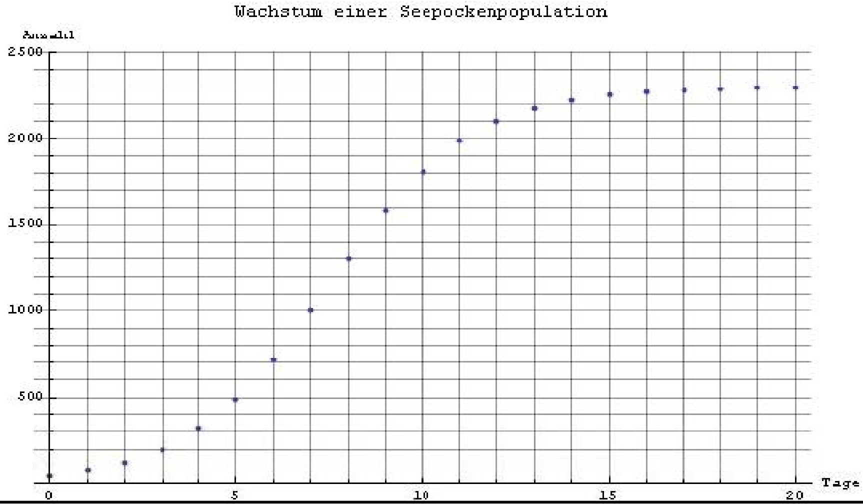
Seepocken

d) Beschreiben Sie das Wachstum der Seepockenpopulation in Worten! [2 Punkte]



Seepocken

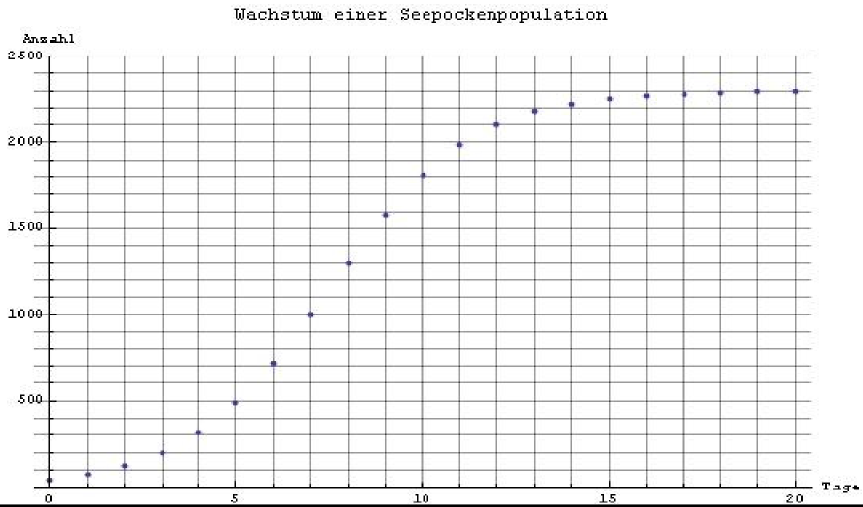
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$



Seepocken

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

$$\frac{dN}{dt} : N = \alpha - \beta N$$



Ein letztes Beispiel

Logik bei Männern und Frauen

Es sein M die Anzahl der Männer und F die Anzahl der Frauen in einem bestimmten Raum. Zwei Behauptungen werden aufgestellt:

(1) Es sind im Raum um elf Männer mehr als Frauen.

(2) $F = 2M$

Ist es möglich, dass die in (1) und (2) aufgestellten Behauptungen zugleich wahr sind?

Falls *ja*: Wie viele Personen befinden sich im Raum?

Falls *nein*: Warum ist dies nicht möglich?